

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского  
Национальный исследовательский университет

В. В. Матросов

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ:  
АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ФАП С  
ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРИРУЮЩИМ ФИЛЬТРОМ**

Учебно–методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 010800 «Радиофизика», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и специальности 090106 «Информационная безопасность телекоммуникационных систем»

Нижний Новгород  
2012

УДК 621.391.01  
ББК В 236.535+323.1  
М 33

Рецензент: д.ф.м.н.      **Г. В. Осипов**

М 33 Матросов В. В. Моделирование систем: анализ динамики и расчет динамических характеристик системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: ННГУ, 2012. – 26с.

В работе изучаются приемы компьютерного исследования нелинейной динамики непрерывной системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с пропорционально-интегрирующим фильтром в цепи управления и методика вычисления динамических характеристик ФАП с использованием методов теории колебаний.

Предназначена для студентов радиофизического факультета ННГУ, специализирующихся в области информационных систем и технологий, динамики систем и процессов управления. Пособие может быть использовано студентами факультета ВМК ННГУ.

Ответственный за выпуск  
заместитель председателя методической комиссии  
радиофизического факультета ННГУ  
д.ф.м.н. профессор Е. З. Грибова

УДК 621.391.01  
ББК В 236.535+323.1

©Нижегородский государственный  
университет им. Н. И. Лобачевского, 2012

## Содержание

<b>1</b>	<b>Общие сведения о системе ФАП</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Динамические режимы и характеристики системы ФАП с фильтром 1-го порядка</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Структура пространства параметров и пространства состояний модели</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Алгоритмы</b>	<b>11</b>
5.1	Построение фазового портрета . . . . .	12
5.2	Расчет динамических характеристик . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Программный комплекс ДНС и некоторые рекомендации по его использованию</b>	<b>17</b>
6.1	Построение фазового портрета . . . . .	19
6.2	Вычисление бифуркационной кривой петли сепаратрис . . . . .	20
6.3	Нахождение предельного цикла и определение его характеристик	20
6.4	Вычисление бифуркационной кривой двойного предельного цикла . . . . .	22
	<b>Контрольные вопросы</b>	<b>22</b>
	<b>Задания</b>	<b>23</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>24</b>

## Цель работы

Формирование представления о моделировании и его роли в проектировании и исследовании сложных радиофизических систем, изложение основополагающих принципов моделирования. Ознакомление с подходами компьютерного исследования нелинейных динамических систем методами теории колебаний. Изучение динамики системы фазовой автоподстройки частоты (ФАП) с пропорционально-интегрирующим фильтром в цепи управления [1–3]. Рассмотрение алгоритмов исследования динамики и расчета динамических характеристик ФАП с фильтром первого порядка. Знакомство с программным комплексом «Динамика нелинейных систем» (ДНС) [4] и приобретение навыков работы с ним.

## 1 Общие сведения о системе ФАП

Системы ФАП предназначены для управления (с помощью внешнего сигнала) фазой колебаний автогенераторов, снабженных управителями частоты. При этом считается, что текущая фаза  $\varphi(t)$  и текущая частота  $\omega(t)$  квазигармонических колебаний  $u(t) = U(t) \cos \varphi(t)$  всегда связаны между собой соотношением  $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$ . Структурная схема простейшей системы ФАП представлена на рис.1.

Устройства ФАП основаны на принципе сопоставления в фазовом дискриминаторе (ФД) текущей фазы  $\varphi_r(t)$  колебаний подстраиваемого по частоте автогенератора (ПГ) с текущей фазой  $\varphi_c(t)$  внешнего сигнала  $u_c(t)$ . Напряжение ошибки  $e(t)$  с выхода фазового дискриминатора ФД, пропорциональное рассогласованию фаз  $\varphi = \varphi_r(t) - \varphi_c(t)$ , используется затем для управления частотой  $\omega_r(t)$  колебаний ПГ в таком направлении, чтобы это рассогласование уменьшалось. Иначе говоря, кольцо ФАП работает по принципу отрицательной обратной связи, противодействующей расхождению фаз двух колебаний. Как и любая система автоматического управления, она содержит три основных элемента - объект управления (ПГ), измерительный орган (ФД) и цепь управления (ЦУ) [3].

Объектом управления в системе ФАП является подстраиваемый по частоте автогенератор (ПГ), а регулируемой величиной - текущая фаза  $\varphi_r(t)$  его колебаний  $u_r(t) = U_r(t) \sin \varphi_r(t)$ . В отсутствие автоподстройки, т.е. при разомкнутом кольце ФАП, подстраиваемый автогенератор ПГ работает на частоте свободных колебаний  $\omega_{св}$ .

Измерительным органом служит фазовый дискриминатор (ФД). Он реагирует на рассогласование фаз колебаний ПГ и внешнего сигнала и выраба-

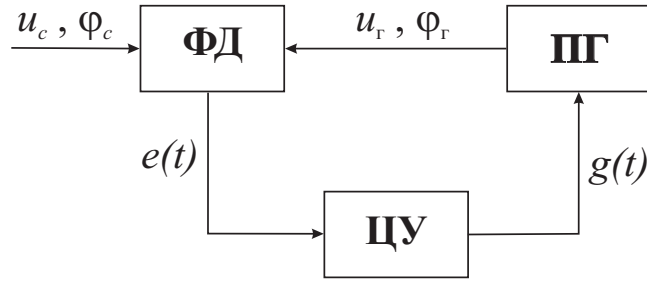


Рис. 1: Структурная схема системы ФАП

тывает напряжение ошибки  $e(t)$ , несущее информацию об этом рассогласовании. В реальных схемах ФД всегда стараются исключить вредное действие модуляции  $U_c(t)$  на ошибку  $e(t)$ .

Цепь управления (ЦУ) служит для придания системе необходимых динамических свойств и уменьшения вредного влияния внешних помех и внутренних дестабилизирующих факторов. Для этого она преобразует определенным образом напряжение ошибки  $e(t)$  в управляющее напряжение  $g(t)$ , которое с помощью управителя частоты, действует на ПГ так, чтобы уменьшить исходное расхождение фаз колебаний ПГ и сигнала. Если вносимая через ЦУ в контур ПГ корректирующая частотная расстройка достаточна для полной компенсации исходной разницы частот ПГ и внешнего сигнала, то возможен режим синхронизма, в котором обеспечивается точное совпадение частоты колебаний ПГ с частотой эталонного колебания при фиксированной разности фаз этих колебаний.

Устройства на основе колец ФАП широко применяются для формирования и обработки радиосигналов с целью придания нужных свойств их главным параметрам - частоте и фазе. Основными задачами, решаемыми с помощью ФАП, являются достижение прецизионной стабильности центральной частоты колебаний управляемого по частоте ПГ в условиях воздействия внешних помех и внутренних дестабилизирующих факторов, а также высокоточное слежение за меняющейся во времени по некоторому закону текущей фазой  $\varphi_c(t)$ . Кроме того, вводя дополнительно к напряжению ошибки  $e(t)$  в тракт обратной связи (после ФД или после ЦУ) специальные модулирующие воздействие, можно реализовать на основе ФАП схему частотной или фазовой модуляции ПГ при сохранении высокой стабильности его центральной частоты, определяемой стабильностью частоты внешнего эталонного сигнала. В схемах частотных или фазовых модуляторов с высокостабильной центральной частотой, построенных на основе ФАП, можно получить достаточно линейные модуляционные характеристики с большим динамическим диапазоном (он определяется наибольшей частотной расстройкой, вносимой управи-

телем частоты), а также корректировать частотные характеристики таких модуляторов путем подбора нужных видов фильтров в ЦУ. Помимо указанных трех задач, устройства с ФАП находят самые разнообразные применения в большом числе других приложений. Например, на основе ФАП строят высокостабильные возбудители передатчиков с множеством дискретных частот; ее используют в системах выделения несущей для синхронного и корреляционного приема, в системах телеметрии, для формирования сложных сигналов с частотной и фазовой модуляцией и т.п. В любом телевизионном приемнике имеется блок синхронизации частот кадровой и строчной разверток, реализуемый схемой ФАП. Промышленность выпускает специализированные микросхемы, реализующие устройства ФАП в различных частотных диапазонах.

В последнее время возник интерес к использованию принципа ФАП для генерации квазигармонических колебаний с хаотическим законом изменения фазы для целей построения систем скрытной связи. Большим достоинством устройств на базе ФАП является возможность получить чрезвычайно эффективное ослабление действия внешних помех с помощью узкополосных РС-фильтров нижних частот в ЦУ. Однако при увеличении инерционности ЦУ проявляются нелинейные свойства ФАП, ухудшаются динамические качества системы и могут наблюдаться потеря синхронизма или срыв слежения и даже переход к хаосу.

## 2 Математическая модель

Чтобы изучать нелинейную динамику ФАП, нужна математическая модель, вид которой зависит от принятых идеализаций. Сделаем следующие допущения: на вход ФАП поступает сигнал с фазой  $\varphi_c(t) = \omega_0 t + \varphi^*$ , где  $\varphi^* - const$ ; отсутствуют внешние и внутренние дестабилизирующие факторы; фазовый дискриминатор представляет собой устройство, выходное напряжение которого определяется разностью фаз напряжений, действующих на его входах; все элементы системы, кроме фильтров нижних частот в цепи управления, являются безинерционными элементами; характеристика управляющего элемента в пределах рабочего участка линейна. При сделанных предположениях модель ФАП в символической записи имеет вид [1–3]:

$$\frac{p\varphi}{\Omega} + K(p)F(\varphi) = \gamma, \quad (1)$$

где  $p \equiv d/dt$ ,  $\Omega$  - максимальная расстройка по частоте, которую может компенсировать цепь управления,  $\gamma = \Omega_H/\Omega$ ,  $\Omega_H = \omega_{св} - \omega_0$  - начальная частотная расстройка колебаний генератора и опорного сигналов,  $K(p)$  - коэффициент передачи фильтра в операторной форме,  $F(\varphi)$  - нормированная

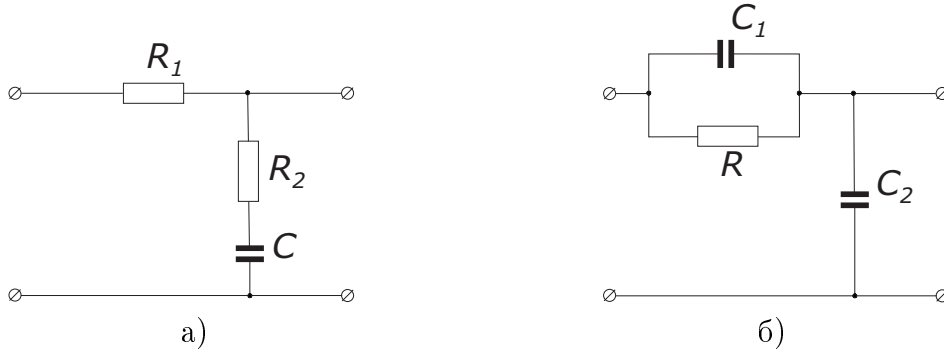


Рис. 2: Схемы фильтров первого порядка

характеристика фазового дискриминатора. Нелинейные свойства уравнения (1) определяются нелинейной характеристикой фазового дискриминатора, а инерционные зависят от фильтра в цепи управления, который подбирается исходя из обеспечения желаемых свойств динамических процессов (устойчивости, быстродействия, фильтрующей способности, характера автомодуляционных режимов). Для любого конкретного фильтра  $K(p)$  от базовой модели (1) в операторной форме можно перейти к модели ФАП в форме дифференциального уравнения, порядок которого определяется типом фильтра  $K(p)$ .

**Модель системы ФАП с фильтром первого порядка (рис. 2).** Рассмотрим ФАП с синусоидальной характеристикой фазового дискриминатора ( $F(\varphi) = \sin \varphi$ ) и пропорционально-интегрирующим фильтром в цепи управления (ПИФ). Фильтр имеет коэффициент передачи  $K(p) = (1 + nTp) / (1 + Tp)$ , где  $n = R_2 / (R_1 + R_2)$ ,  $T = (R_1 + R_2)C$  для схемы на рис. 2а,  $n = C_1 / (C_1 + C_2)$ ,  $T = R(C_1 + C_2)$  для схемы на рис. 2б. При сделанных предположениях уравнение (1) преобразуется в динамическую систему:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} &= y \equiv P(\varphi, y), \\ \varepsilon \frac{dy}{d\tau} &= \gamma - \sin \varphi - [1 + n \cos \varphi]y \equiv Q(\varphi, y), \end{aligned} \quad (2)$$

определенную на двумерном фазовом цилиндре  $V = \{\varphi(\text{mod } 2\pi), y\}$ , где  $\tau = \Omega t$  – безразмерное время,  $\varepsilon = \Omega T$  и  $n$  – безразмерные параметры фильтра низких частот.

### 3 Динамические режимы и характеристики системы ФАП с фильтром 1-го порядка

Между стационарными динамическими режимами ФАП и аттракторами моделей ФАП существует взаимнооднозначное соответствие. В фазовом про-

пространстве  $V$  модели (2) могут реализовываться два типа аттракторов, они являются образами возможных динамических режимов системы ФАП с фильтром первого порядка.

*Режим синхронизации (режим удержания)* подстраиваемого генератора ПГ опорным сигналом, при котором частоты опорного и подстраиваемого генераторов равны, а медленные изменения параметров, определяющих эти частоты, практически полностью компенсируются действием системы автоподстройки. В фазовом пространстве математических моделей режиму синхронизации отвечает устойчивое состояние равновесия  $O_1(\varphi_1^*, y_1^*=0)$ . При этом координата  $\varphi_1^*$  характеризует точность синхронизации колебаний по фазе.

*Режимы биений*, при которых разность фаз подстраиваемого и опорного сигналов неограниченно нарастает. Этому режиму в фазовом пространстве соответствуют устойчивый предельный цикл  $L$  второго рода.

Динамические режимы неразрывно связаны с динамическими характеристиками системы ФАП. В традиционных применениях систем ФАП в качестве основного динамического режима рассматривался режим синхронизации. Удержание этого режима при вариациях  $\gamma$  характеризуется понятием *полосы удержания режима синхронизации*, т.е. диапазона начальных частотных расстроек  $\gamma$ , в которых происходит удержание режима синхронизации. Поскольку динамические модели системы ФАП, как правило, являются многопараметрическими, то в пространстве параметров этих моделей режиму синхронизации отвечает целая область параметров, поэтому в настоящее время наряду с понятием *полоса удержания режима синхронизации* используют эквивалентное, но более общее понятие *область удержания режима синхронизации*, т.е. множество всех значений параметров, в которых возможен режим синхронизации.

Переходное состояние системы, при котором в результате вариаций  $\gamma$  режим биений переходит с течением времени в режим синхронизации, называется захватом в режим синхронизации. С этим состоянием системы связано понятие *полосы захвата в режим синхронизации*. Под *полосой захвата в режим синхронизации* понимается область начальных расстроек  $\gamma$ , в которой при любых начальных условиях устанавливается режим синхронизации.

Численное определение динамических характеристик проводится по алгоритмам, основанным на результатах качественного исследования системы (2), содержащих сведения о существовании и характере имеющихся состояний равновесия, предельных циклов, их бифуркаций и бифуркаций сепаратрис седел.



## 4 Структура пространства параметров и пространства состояний модели

Уравнения (2) в связи с задачами ФАП в различных предположениях рассматривались В.М. Капрановым [5], Л.Н. Белюстиной [6], Н.А. Губарь [7], Н.Н. Баутиным [8] и др. Полное качественное исследование для достаточно общей функции  $F(\varphi)$  проведено Л.Н. Белюстиной и В.Н. Белых в [9]. Эти результаты представлены на рис. 3 в виде качественного разбиения плоскости параметров  $(\varepsilon, \gamma)$  и соответствующих грубых фазовых портретов [10].

Траектории в цилиндрическом фазовом можно рассматривать на плоскости  $(\varphi, y)$ . При этом учитывают цикличность координаты  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  и качественную картину расположения траекторий системы рассматривают в полосе шириной  $2\pi$ , например, от  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Во любой другой полосе типа  $k\pi \leq \varphi \leq (k+1)\pi$  ( $k$  - некоторое целое число) качественный портрет системы будет тем же самым.

При значениях параметров из области  $D_1$  на фазовом цилиндре  $V$  существуют два состояния равновесия: глобально устойчивое  $O_1(\varphi = \varphi_1^*, y=0)$  и седловое  $O_2(\varphi = \varphi_2^*, y=0)$ , где  $\varphi_1^* = \arcsin \gamma$ ,  $\varphi_2^* = \pi - \varphi_1^*$ . Эта область является областью захвата в синхронный режим. При выходе из области  $D_1$  в область  $D_2$  в результате бифуркации петли сепаратрис 2-го рода (рис. 3г) происходит рождение вращательного предельного цикла  $L$ , который определяет режим регулярных биений. Переход из области  $D_1$  в область  $D_3$  сопровождается бифуркацией двукратного цикла (рис. 3г)<sup>1</sup>. При переходе из области  $D_3$  в область  $D_2$  неустойчивый предельный цикл  $\Gamma$  исчезает в петлю сепаратрис седла  $O_2$ . В областях  $D_2$  и  $D_3$  система (2) имеет два аттрактора:  $O_1$  и  $L$ , следовательно здесь в зависимости от начальных условий могут реализовываться как синхронный, так и асинхронный режимы. Штрих-пунктирная прямая  $\gamma=1$  является границей области удержания режима синхронизации, при пересечении этой прямой снизу вверх устойчивое состояние равновесия  $O_1$ , отвечающее за режим синхронизации, исчезает сливаясь с седловым состоянием равновесия  $O_2$ . Часть прямой  $\gamma=1$ , прилегающая к оси  $\varepsilon=0$ , отвечает петле сепаратрис седло–узла. При значениях параметров из области  $D_4$  в фазовом пространстве системы (2) существует единственный аттрактор  $L$  – в системе ФАП при любых начальных условиях реализуется режим биений. Таким образом, границей области удержания системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром является прямая  $\gamma=1$ , а границей области захвата в синхронный режим, слева от точки  $M$  служит бифуркационная кривая пет-

<sup>1</sup>Бифуркация двукратного предельного цикла или касательная бифуркация характеризуется равенством мультипликатора цикла единице ( $\mu = +1$ ). В результате этой бифуркации на фазовом цилиндре  $V$  появляются (исчезают) устойчивый  $L$  и неустойчивый  $\Gamma$  предельные циклы

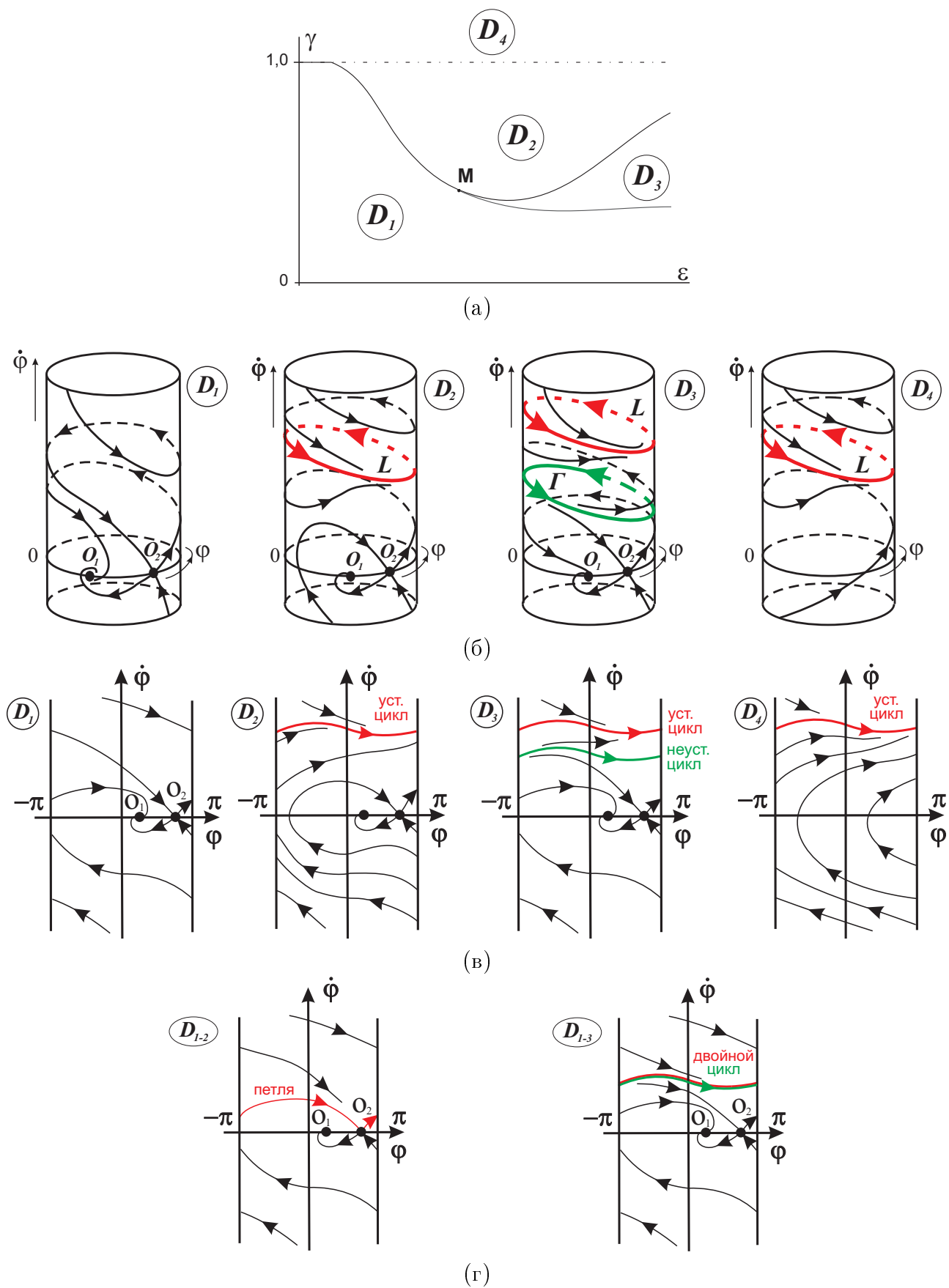


Рис. 3: Структура пространства параметров модели (2) (а); грубые фазовые портреты на фазовом цилиндре (б) и на развертке фазового цилиндра (в); негрубые фазовые портреты, определяющие бифуркации (г).

ли сепаратрис, справа от  $M$  – бифуркационная кривая двойного предельного цикла. Точка  $M$  отвечает обращению в ноль седловой величины  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ ? где  $\lambda_{1,2}$  корни характеристического уравнения для состояния равновесия  $O_2$ . Когда в цепи управления ФАП стоит интегрирующий фильтр (случай  $n = 0$ ), границей области захвата в синхронный режим служит бифуркационная кривая петли сепаратрис.

Следует заметить, что даже при наличии полного качественного исследования динамических систем количественные данные о бифуркационных кривых устанавливаются численными методами с помощью ЭВМ и специальных программ [4, 11–16].

## 5 Алгоритмы

Исследование динамики системы ФАП по математическим моделям сводится к изучению соответствующих фазовых пространств. Существует несколько подходов к исследованию фазовых пространств нелинейных динамических систем: качественный, численный и качественно-численный.

Результаты качественного подхода представлены в разделе 4. Этот подход может дать полную информацию о динамике системы, однако, в настоящее время, общих методов и рекомендаций, как исследовать динамику нелинейной системы качественными методами нет. Качественный подход сложен, трудоёмок, не гарантирует положительного результата. Полученная информация обычно не привязана к конкретным значениям параметров.

Численный подход, основан на построении и анализе большого количества интегральных кривых. Как правило, используется «сеточный алгоритм», когда интересующая исследователя область фазового пространства покрывается сеткой, координаты узлов сетки используются в качестве начальных условий для построения интегральных кривых, совокупное поведение интегральных кривых дает представление о динамике нелинейной модели [17]. Численный подход требует больших вычислительных затрат, получаемая картина, в силу большого числа траекторий, сложна для анализа, не исключает ложных выводов.

Представляется, что наиболее результативным способом исследования динамики нелинейных систем является качественно-численный подход, основанный на сочетании качественной теории динамических систем и численных методов [18]. Особенно действенно он зарекомендовал себя при исследовании автономных систем второго порядка, для которых известны все возможные типы поведения. Качественно-численный подход требует знаний основ теории колебаний, а также наличие специальных программных средств.

## 5.1 Построение фазового портрета

Рассмотрим качественно-численный подход к изучению динамики модели ФАП с фильтром 1-го порядка. Известно, что структура фазового портрета двумерных динамических систем определяется особыми траекториями: состояниями равновесия, предельными циклами и сепаратрисами. Отсюда следует, что фазовый портрет построен, если в результате компьютерного моделирования на графическом изображении обозначены все особые траектории.

Алгоритм построения фазового портрета в пакете ДНС включает в себя выполнение следующих процедур [4]:

- Инициализация параметров модели – присвоение параметрам  $(\gamma, \varepsilon, n)$  конкретных значений.
- Инициализация начальных состояний модели – определение начальных условий для построения фазовых траекторий.

Если  $|\gamma| > 1$ , то структура фазового портрета модели (3) определяется единственной особой траекторией – устойчивым предельным циклом  $L$ . Цикл  $L$  глобально устойчив, поэтому для получения его графического образа подойдут любые разумные (например, из отображаемой области фазового пространства) начальные условия.

Если  $|\gamma| < 1$ , то достаточно построить пять фазовых траекторий. При этом четыре траектории являются особыми (сепаратрисы), одна – неособой, с начальными условиями вне поглощающей области  $\Pi$ , при  $\gamma > 0$ ,  $\Pi: \{\varphi \in [-\pi, \pi], y > 1 + \gamma\}$ ). В малой окрестности состояния равновесия траектории нелинейной и линеаризованной систем близки, поэтому в этой окрестности задание начальных условий на сепаратрисах нелинейной модели может быть заменено заданием начальных условий на сепаратрисах линеаризованной модели. Определение начальных условий на сепаратрисах линеаризованной модели сводится к определению координат точки, отстоящей от состояния равновесия  $O_2$  на малую величину  $\epsilon$  ( $\epsilon$ -окрестность седла) в направлениях, определяемых собственными векторами матрицы коэффициентов линеаризованной системы. Таким образом, определение сепаратрис производится по следующему алгоритму **A1**:

– вычисляются координаты состояния равновесия  $O_2(\varphi_2^*, y_2^*)$ , путем численного решения системы уравнений

$$\begin{cases} P(\varphi, y) = 0, \\ Q(\varphi, y) = 0; \end{cases}$$

– находятся собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  точки  $O_2$  как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} P'_\varphi(\varphi_2^*, y_2^*) - \lambda & P'_y(\varphi_2^*, y_2^*) \\ Q'_\varphi(\varphi_2^*, y_2^*) & Q'_y(\varphi_2^*, y_2^*) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

и собственные векторы  $v_1$  и  $v_2$ , отвечающие собственным числам  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 < 0$ . По найденным собственным векторам можно определить лишь две сепаратрисы из четырех. Для определения оставшихся двух сепаратрис используют найденные векторы, изменяя их направления на противоположные;

– формируется информационный вектор построения сепаратрисы: выбирается соответствующий сепаратрисе собственный вектор и определяется его направление, указывается цвет изображения сепаратрисы, временной интервал ее построения. Сформированный таким образом информационный вектор записывается в файл "набор начальных состояний".

Сепаратрисы седла  $O_2$  различаются собственными векторами и их направлениями, для определения всех четырех сепаратрис седла  $O_2$  алгоритм **A1** повторяется четыре раза, при этом новая запись отличается от уже созданных собственным вектором или его направлением.

Задание начальных условий в *неособой* точке предусматривает формирование информационного вектора, который содержит следующие сведения: координаты точки начальных условий, направление интегрирования (в прямом или обратном времени), цвет изображения траектории, временной интервал ее построения. Сформированный информационный вектор записывается в файл "набор начальных состояний" в виде очередной записи.

Таким образом, результатом инициализации начальных состояний модели 2) является файл "набор начальных состояний", содержащий пять записей: четыре сепаратрисы седла  $O_2$  и одну траекторию с начальными условиями вне поглощающей области  $\Pi$ .

• Задание параметров счета. Основной вычислительной процедурой при построении фазовых портретов нелинейных систем является численное интегрирование. В пакете ДНС интегрирование моделей осуществляется методом Рунге-Кутты четвертого порядка с автоматическим подбором шага интегрирования для обеспечения заданной точности, поэтому параметрами счета являются: начальный, минимальный, максимальный шаги интегрирования, точность интегрирования, а также время интегрирования траектории. По умолчанию интегрирование осуществляется в прямом времени, для построения фазовой траектории в обратном времени, необходимо задать начальный шаг интегрирования отрицательным.

• Определение рассматриваемой области фазового пространства. Как правило, фазовый портрет динамической системы есть небольшая часть фазового пространства, по которой можно судить о структуре всего пространства. Данный фрагмент и есть рассматриваемая область фазового пространства, т.е. это область которая отображается на экране дисплея. Для её определения необходимо задать границы области наблюдения отображаемых координат

фазовых переменных или иных величин.

- Задание параметров изображений – определение размеров и видов графических окон изображений, цветовой палитры, а также цикличности фазовых координат. Вид графического окна определяется тем, какая информация выводится по осям абсцисс и ординат, это могут быть фазовые координаты (при построении фазовых портретов), фазовая координата и время (при построении осциллограмм) или иная информация. Определение цикличности фазовых координат является обязательной процедурой при построении фазовых портретов систем с цилиндрическим фазовым пространством<sup>2</sup>.

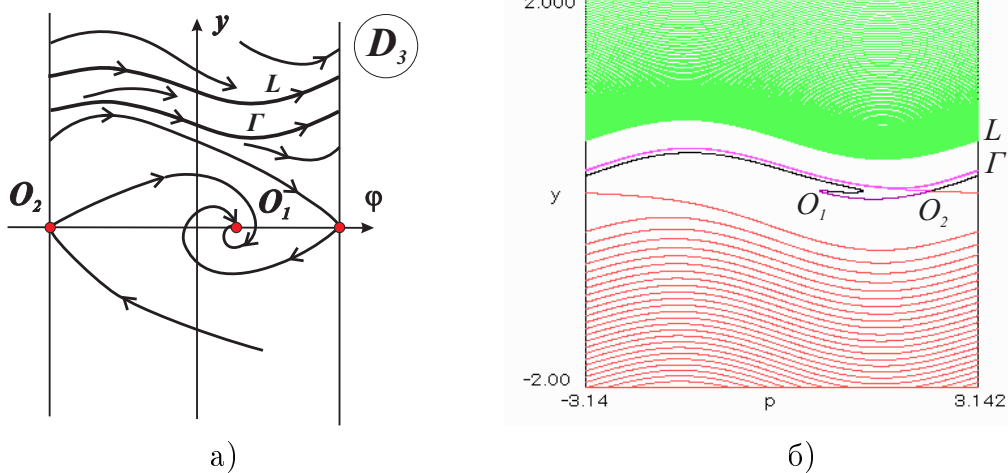


Рис. 4: Фазовый портрет модели (3) при значениях параметра из области  $D_2$ : а) – качественный, б) – результат компьютерного моделирования в пакете ДНС.

- Построение фазового портрета. Процесс численного интегрирования фазовых траекторий, определенных в файле "набор начальных состояний", и отображение их на экране дисплея в рассматриваемых областях. Заметим, что, во-первых, фазовые траектории (или их части) проходящие вне рассматриваемого фрагмента, на экране не отображаются, во-вторых, фазовый портрет, полученный путем компьютерного моделирования в пакете ДНС,

<sup>2</sup>Построение фазового портрета системы на цилиндре сводится к построению фазового портрета в полосе, при этом необходимо обеспечить выполнение двух условий:

1. Изображение фазовой траектории при достижении правой (левой) границы полосы должно "перескакивать" на левую (правую) границу.
2. Так как фазовая траектория в численном эксперименте представляет собой дискретный набор точек, необходимо обеспечить попадание изображающей фазовую траекторию точки на границу полосы. Только в этом случае можно обеспечить непрерывность изображения фазовой траектории на границе полосы.

Выполнение первого условия легко обеспечить, если вместо значения циклической координаты  $\varphi$ , полученного в результате численного интегрирования модели (2), брать значение некоторой вспомогательной величины  $\varphi_{new} = \varphi \pmod{2\pi}$ . Выполнение второго условия связано с уточнением точки пересечения траектории с границей полосы (секущей). Для уточнения точки пересечения можно воспользоваться линейной или кубической интерполяцией [15].

несколько отличается, от фазовых портретов, построенных качественно (рис.3, рис.4а). Основное отличие состоит в том, что предельные циклы на “компьютерных” фазовых портретах изображаются неизолированными траекториями, а характеризуются уплотнением фазовых траекторий (рис.4б).

## 5.2 Расчет динамических характеристик

Из качественного анализа модели (2) (см. раздел 4) следует, что границей области удержания системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром является прямая  $\gamma=1$ , а границей области захвата в синхронный режим, слева от точки  $M$  служит бифуркационная кривая петли сепаратрис, справа от точки  $M$  – бифуркационная кривая двойного предельного цикла. Точка  $M$  отвечает обращению в ноль седловой величины. В случае, когда в цепи управления ФАП стоит интегрирующий фильтр (случай  $n = 0$ ), границей области захвата в синхронный режим служит бифуркационная кривая петли сепаратрис. Существуют программы [13], которые автоматически строят границу области захвата рассматриваемой модели (2) по алгоритмам [11, 12]. Вычисление границ области захвата с использованием программ пакета ДНС предусматривает нахождения двух бифуркационных кривых: петли сепаратрис и двукратного предельного цикла.

**Построение бифуркационной кривой петли сепаратрис.** Для построения бифуркационной кривой петли сепаратрис используется следующий алгоритм (рис. 5):

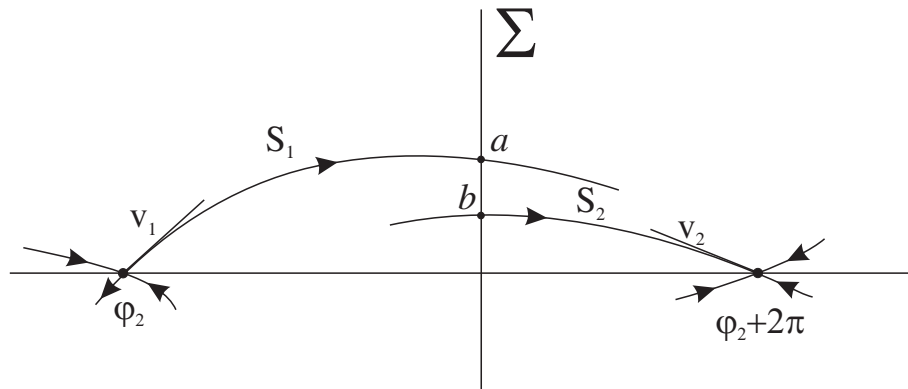


Рис. 5: Иллюстрация к определению функции расщепления сепаратрис

- вычисляются координаты седла  $O_2(\varphi_2, y_2)$ ;
- находятся собственные числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  точки  $O_2$  и собственные векторы  $v_1$  и  $v_2$ , отвечающие собственным числам  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ;
- строится траектория системы (2), представляющая собой сепаратрису  $S_1$  седла  $O_2(\varphi_2^*, y_2^*)$ , выходящую по вектору  $v_1$ , отвечающему собственному

числу  $\lambda_1 > 0$ ; в качестве начальной точки для интегрирования системы (2), берется точка на векторе  $v_1$ , отстоящая от седла  $O_2$  на малую величину  $\epsilon$ ;

- фиксируется и уточняется точка пересечения  $a(\varphi_a, y_a)$  сепаратрисы  $S_1(O_2)$  с секущей  $\Sigma$ ;

- строится траектория системы (2), представляющая собой сепаратрису  $S_2$  седла  $O_2(\varphi_2^* + 2\pi, y_2^*)$ , входящую по вектору  $v_2$ , отвечающему собственному числу  $\lambda_2 < 0$ ; в качестве начальной точки для интегрирования системы (2), берется точка на векторе  $v_2$ , отстоящая от седла  $O_2$  на малую величину  $\epsilon$ . Сепаратриса  $S_2$  строится в обратном времени, т.е. с отрицательным шагом интегрирования;

- фиксируется и уточняется точка пересечения  $b(\varphi_b, y_b)$  сепаратрисы  $S_2(O_2)$  с секущей  $\Sigma$ ;

- вычисляется функция расщепления  $\rho(\gamma, \varepsilon, n) = (\varphi_b - \varphi_a) + (y_b - y_a)$ ;

- находится интервал по одному из параметров, например,  $\gamma$  при фиксированных значениях  $\varepsilon$  и  $n$ , на концах которого функция расщепления  $\rho$  имеет разные знаки. Интервал  $(\gamma^-, \gamma^+)$  находится с точностью  $\delta$ , т.е.  $|\gamma^+ - \gamma^-| < \delta$ ;

- вычисляется седловая величина  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$ , по знаку которой определяется является ли найденное значение границей области захвата: если  $\sigma < 0$ , то значение  $\gamma^-$  определяет полосу захвата, если  $\sigma > 0$ , то полоса захвата определяется по бифуркационному значению двукратного предельного цикла.

### Построение бифуркационной кривой двукратного предельного цикла.

Построение бифуркационной кривой двукратного предельного цикла происходит в два этапа. Этап 1 предусматривает исследование периодических решений модели (2), этап 2 – поиск бифуркационной кривой двукратного предельного цикла. Отыскание периодических движений системы (2) и исследование их поведения при изменении параметров сводится к поиску неподвиж-

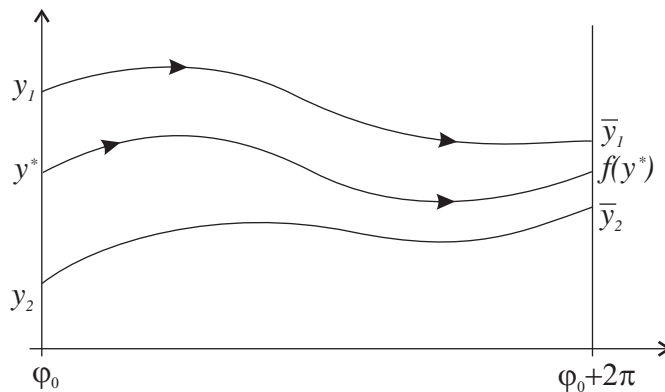


Рис. 6: Иллюстрация к построению отображения Пуанкаре



ной точки точечного отображения  $T_\varphi$  прямой  $\varphi = \varphi_0$  в прямую  $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ . Для определения отображения  $T_\varphi$  для ряда точек  $y_j$  на прямой  $\varphi = \varphi_0$  с помощью численного интегрирования системы (2) определяются их последующие  $\bar{y}_j$  на прямой  $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$ , точки  $y_j$  и  $\bar{y}_j$  определяют функцию  $\bar{y}_j = f(y_j)$ . Существованию предельного цикла соответствует неподвижная точка  $y^*$  отображения  $T_\varphi$ , определяемая из уравнения  $y^* - f(y^*) = 0$ . Периодическая траектория устойчива, если  $s < 1$ , неустойчива, если  $s > 1$ , где  $s = f'(y^*)$  – мультипликатор неподвижной точки (периодического движения). Поиск предельных циклов второго рода, вычисление их периода и мультипликаторов, исследование эволюции предельных циклов при изменении параметров динамической модели реализует модуль «Периодические движения» программного комплекса ДНС.

Построение бифуркационной кривой двукратного предельного цикла сводится к поиску таких значений параметров, при которых мультипликатор  $s(\gamma, \varepsilon, n)$  неподвижной точки обращается в единицу. В плоскости двух параметров, например,  $(\varepsilon, \gamma)$  для фиксированных  $n$ , задача построения бифуркационной кривой двукратного предельного цикла сведена к численному решению системы двух уравнений

$$\begin{aligned} y^*(\gamma, \varepsilon) - f(y^*(\gamma^*, \varepsilon^*)) &= 0, \\ s(y^*, \gamma^*, \varepsilon^*) &= +1, \end{aligned} \quad (3)$$

с тремя неизвестными:  $y^*$  – координата неподвижной точки ( $(\varphi_0, y^*)$  – координата точки на цикле),  $\gamma^*, \varepsilon^*$  – значения параметров на бифуркационной кривой двукратного предельного цикла. Решение системы (3) находится численно, используя, например, алгоритм движения по бифуркационной кривой [16]. Алгоритм поиска двукратного предельного цикла реализует модуль «Бифуркационная кривая» комплекса ДНС. Для успешной работы указанного алгоритма необходимо задание параметров в окрестности бифуркационной кривой, т.е. необходимо знать координаты неподвижной точки  $y^*(\gamma, \varepsilon, n)$  с мультипликатором  $s$  близким к единице, например,  $s \approx 0.95$  или даже более близкими. Найти такие параметры можно с помощью программного модуля «Периодические движения» комплекса ДНС.

## 6 Программный комплекс ДНС и некоторые рекомендации по его использованию

Программный комплекс “Динамика нелинейных систем” (ДНС) [4] позволяет проводить качественно-численное исследование динамических моделей,

описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений зависящими от параметров. Максимальная размерность систем  $N=10$ , а число параметров  $N_{par}=20$ . Изучение нелинейных моделей базируется на методах теории колебаний и предусматривает решение динамических задач, представленных в табл. 1.

Таблица 1

Назначение	Модуль
Построение двумерных проекций фазовых портретов и временных реализаций динамических систем с непрерывным временем	Фазовые портреты
Построение отображения Пуанкаре, порождаемого фазовыми траекториями системы обыкновенных дифференциальных уравнений	Точечные отображения
Построение однопараметрических бифуркационных диаграмм отображения Пуанкаре	Бифуркационные диаграммы
Поиск предельных циклов и вычисление их характеристик (периода и мультипликаторов), исследование эволюции предельных циклов при изменении параметров динамической модели	Периодические движения
Поиск в пространстве параметров динамических систем координат точек кривой, отвечающей бифуркациям периодических движений	Бифуркационная кривая
Поиск на плоскости параметров динамической системы координат точек кривой, отвечающей бифуркациям состояний равновесия	Состояния равновесия
Вычисление ляпуновских характеристических показателей на решениях динамической модели	Ляпуновские показатели
Вычисление спектра мощности и корреляционной функции процесса, определяемого решениями динамической модели	Спектры
Поиск в пространстве параметров двумерных динамических систем координат точек бифуркационных кривых, соответствующих совпадению сепаратрис седловых состояний равновесия	Сепаратрисные связи

Ниже даны рекомендации по использованию комплекса ДНС, при решении нескольких задач моделирования динамики ФАП с фильтром первого порядка, в частности, анализ динамики ФАП и расчет границы области захвата в режим синхронизации. Решение первой задачи сводится к построению фазовых портретов модели (2) для различных значений параметров. Эта задача решается с помощью программного модуля «Фазовые портреты». Решение второй задачи сводится к поиску бифуркационных кривых петли сепаратрис и двукратного предельного цикла. Поиск бифуркационных кривых осуществляется с использованием следующих программных модулей: «Сепаратрисные связи», «Периодические движения», «Бифуркационная кривая».

## 6.1 Построение фазового портрета

Для построения фазового портрета исследуемой системы необходимо для фиксированных значений параметров модели определить фазовые траектории, которые полностью определяют динамическое поведение исследуемого объекта: четыре сепаратрисы седлового состояния равновесия  $O_2$  с координатами ( $\varphi_2 = \pi - \arcsin \gamma$ ,  $y_2 = 0$ ) и траекторию с начальными условиями  $\varphi_5 \in [-\pi, \pi]$ ,  $y_5 > y_{max}$ , где  $y_{max} = (\gamma + 1)/\varepsilon$  - верхняя граница поглощающей области. Для определения фазовых траекторий необходимо выбрать пункты меню:

### 2. Задание начального состояния

#### 2.1. Набор начальных состояний

##### 2.1.1. Настройка

###### 2.1.1.1. Начальные условия в окрестности "особой" точки.

Определение 1-й сепаратрисы :

- (рис. 7) Задать  $x(1) \approx \varphi_2$ ,  $x(2) \approx y_2$ , нажать клавишу **F1**.
- (рис. 8) Клавишами **PageDown** и **-** выбрать вектор, определяющий сепаратрису, нажать клавишу **Enter**. (1-ый вектор соответствует выходящим сепаратрисам, а 2-й – входящим; направление вектора изменяется клавишей минус.)
- (рис. 9) Определить цвет траектории **Icp** 0 – Черный, 1 – Синий, 2 – Зеленый, 3 – Голубой, 4 – Красный, 5 – Розовый, 6 – Коричневый, 7 – Белый, 8 – Темно-серый, 9 – Светло-синий, 10 – Светло-зеленый, 11 – Светло-голубой, 12 – Светло-красный, 13 – Светло-розовый, 14 – Светло-коричневый, 15 – Ярко-белый и время интегрирования **TimeI=3000**.
- Нажать клавишу **F1**.

###### 2.1.1.1. Начальные условия в окрестности "особой" точки.

Определение 2-й сепаратрисы. Проводится аналогично определению 1-й сепаратрисы.

###### 2.1.1.1. Начальные условия в окрестности "особой" точки.

Определение 3-й сепаратрисы. Проводится аналогично определению 1-й сепаратрисы.

###### 2.1.1.1. Начальные условия в окрестности "особой" точки.

Определение 4-й сепаратрисы. Проводится аналогично определению 1-й сепаратрисы.

###### 2.1.1.2. Начальные условия в "неособой" точке.

Определение 5-й траектории.

- (рис. 10) Задать  $x(1) \approx \varphi_5$ ,  $x(2) \approx y_5$ , определить цвет траектории **Icr**; время интегрирования **TimeI=300.**; масштабный множитель шага интегрирования **Zh=1.**
- Нажать клавишу **F1.**
- \* Перейти к пункту главного меню «**Начало счета**».
- \* Сохраните изображение фазового портрета (клавиша **{Alt,F1}**).
- \* Для автоматического построения фазового портрета при новых значениях параметров можно воспользоваться пунктом локального меню «**Набор начальных состояний**» – “Автоматическая коррекция-1”.
- \* Сохраните изображение фазового портрета (клавиша **{Alt,F1}**).

## 6.2 Вычисление бифуркационной кривой петли сепаратрис

Выберите значения параметров  $\gamma, \varepsilon$  в окрестности бифуркационной кривой петли сепаратрис. Эти значения параметров можно определить из построения фазовых портретов. В локальном меню «**Настройка**» задать необходимые сепаратрисы и секущую. Правильность настройки проконтролировать визуально с помощью просмотра графического изображения (клавиш **F9** и **Alt,F3**). Убедившись в правильности настройки, выбрать пункт главного меню **Счет**. Программа для фиксированного значения  $\varepsilon_0$  находит интервал  $\gamma$ , где функция расщепления меняет знак. Сохранить параметры настройки в локальном меню «**Настройка**» (клавиша **F7**). Найти бифуркационные значения  $\gamma$  для значений параметров  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , воспользовавшись пунктом главного меню «**Движение по параметру**». Восстановить параметры настройки в локальном меню «**Настройка**» (клавиша **F7**). Найти бифуркационные значения  $\gamma$  для значений параметров ( $\varepsilon < \varepsilon_0$ ), воспользовавшись пунктом главного меню «**Движение по параметру**». Результаты счета находятся в файле `kontur.r??` (`kontur.r01`, `kontur.r02`, ...). Постройте бифуркационную кривую петли сепаратрис в логарифмическом масштабе по  $\varepsilon$ , проанализируйте ее поведение.

## 6.3 Нахождение предельного цикла и определение его характеристик

Выберите значения параметров из области параметров, где существуют предельные циклы. В режиме «**Счет**» задайте фазовые координаты точки близкие к предельному циклу. ( $x(1)$  соответствует  $\varphi$ ,  $x(2) - y$ ). Найдите координаты точки на цикле с помощью метода Ньютона. Проанализируйте вычисленные характеристики найденного цикла, измените значения параметров,

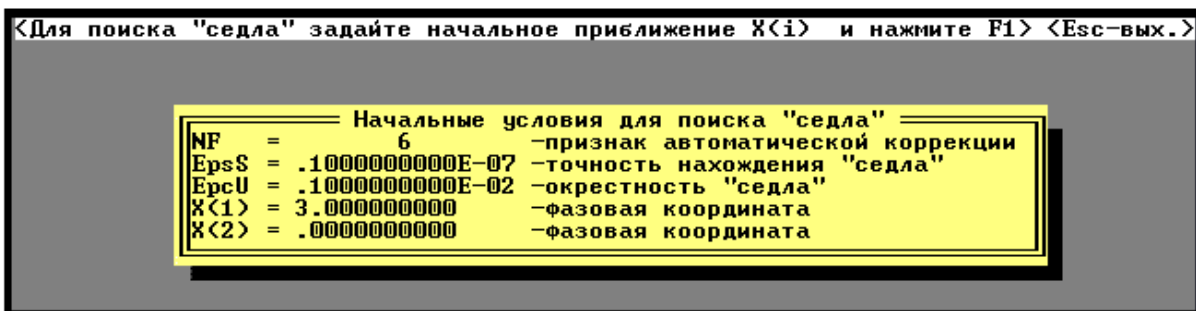


Рис. 7: Меню для определения параметров поиска состояния равновесия

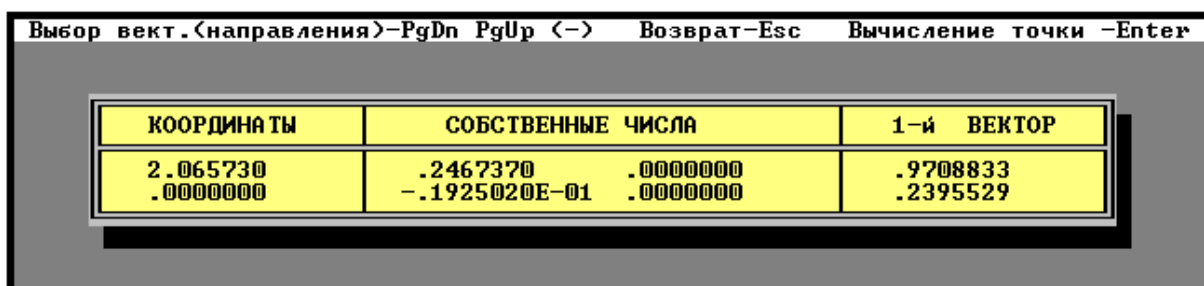


Рис. 8: Меню для выбора сепаратрисы

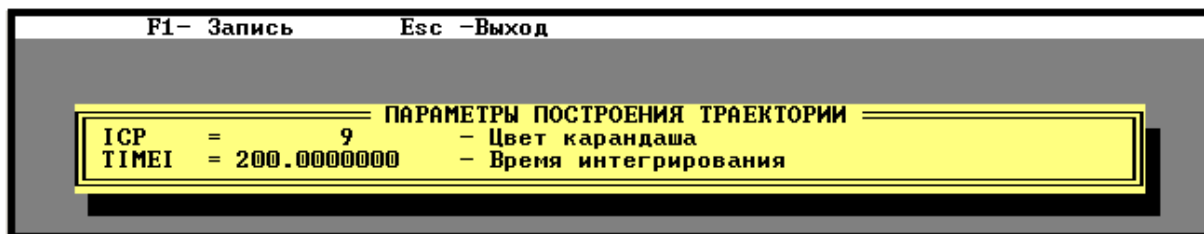


Рис. 9: Меню для определения параметров построения сепаратрисы

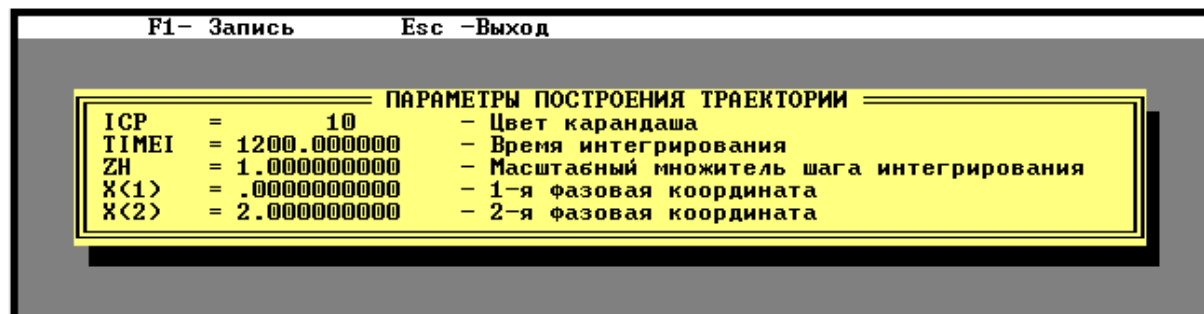


Рис. 10: Меню для определения параметров построения *неособой* фазовой траектории

Esc - выход		<Alt,F1> - помощь		
КООРДИНАТЫ		СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА		1-й ВЕКТОР
-4.217455	.00000000	.2467370	.00000000	.9708833
		-.1925020E-01	.00000000	.2395529
КООРДИНАТЫ		СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА		2-й ВЕКТОР
2.065730	.00000000	.2467370	.00000000	-.9998148
		-.1925020E-01	.00000000	.1924663E-01
СЕКУЩАЯ				
A<1>= 1.000000				
A<2>= .00000000				
A<3>= -.50000000				

Рис. 11: Меню идентификации параметров расчета функции расщепления сепаратрис при построении бифуркационной кривой петли сепаратрис

приблизив их к бифуркационной кривой двойного предельного цикла. Близость определяется по значению мультипликатора  $\mu$ , которое должно быть близко к  $+1$  ( $|\mu - 1| < 0.05$ ). Постройте графики зависимости мультипликатора и периода цикла от параметра  $\gamma$  ( $\varepsilon$ ) при фиксированном значении  $\varepsilon$  ( $\gamma$ ). Результаты счета находятся в файле pm1.r??.

#### 6.4 Вычисление бифуркационной кривой двойного предельного цикла

Выберите значения параметров в окрестности бифуркационной кривой двойного предельного цикла. В меню настройка проведите настройку на построение бифуркационной кривой двойного предельного цикла (Ibif=1), задайте секущую (PL(1)=1, PL(2)=0, PL(1)=- $\pi$ ) и определите тип цикла (Ic=1, Pecs=2 $\pi$ ). Вычислите значения бифуркационной кривой. Постройте бифуркационную кривую двойного предельного цикла в логарифмическом масштабе по  $\varepsilon$ , проанализируйте ее поведение. Результаты счета находятся в файле curve.r??.

### Контрольные вопросы

1. Объяснить назначение, физический смысл параметров и переменных уравнения (1).
2. Получить из уравнения (1) динамическую модель системы ФАП с ПИФ.

- Объяснить назначение, физический смысл параметров и переменных модели (2).
3. Объяснить, какими особыми траекториями определяется качественная структура разбиения цилиндрического фазового пространства на траектории динамической системы.
  4. Какие состояния равновесия имеет система (2)?
  5. Какие бифуркации могут иметь место в системе (2)?
  6. Как зависит разбиение плоскости параметров  $(\varepsilon, \gamma)$  системы (2) от параметра  $n$  ?
  7. Объяснить, как изменяется структура фазового портрета системы (2) при пересечении бифуркационных кривых на плоскости параметров  $(\varepsilon, \gamma)$ .
  8. Какие стационарные режимы могут реализовываться в системе ФАП с ПИФ? Какими особыми траекториями они определяются ?
  9. Какими динамическими характеристиками описывается качество функционирования ФАП, как устройства синхронизации?
  10. Как определяется область существования (удержания) режима синхронизации?
  11. Как определяется область захвата в режим синхронизации?

## Задания

1. Для заданного значения параметра  $n$  и определенной характеристики фазового дискриминатора (синусоидальной, трапецеидальной, пилообразной) построить грубые фазовые портреты модели (2) для областей  $D_1, D_2, D_3$  (рис.3), сохранить их графические образы и файлы настройки (файлы "набор начальных состояний" для областей  $D_1, D_2, D_3$ ).
2. Для заданного значения параметра  $n$  и определенной характеристики фазового дискриминатора рассчитать границу области захвата в режим синхронизации.

## Список литературы

- [1] Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
- [2] Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении / Пер. с англ. Под ред. Бакаева Ю.Н. и Капранова М.В. М.: Сов.радио.1978.
- [3] Капранов М.В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. М.: МЭИ. 2006.
- [4] Матросов В.В. Динамика нелинейных систем. Программный комплекс для исследования нелинейных динамических систем с непрерывным временем. Н.Новгород. ННГУ. 2002.
- [5] Капранов М.В. Полоса захвата при фазовой автоподстройке частоты // Радиотехника. 1956. Т. 11, № 12. С. 37–52.
- [6] Белюстина Л.Н. Исследование нелинейной системы фазовой автоподстройки частоты // Изв. вузов. Радиофизика. 1959. Т. 2, № 2. С. 277–291.
- [7] Губарь Н.А. Исследование одной кусочно-линейной системы с тремя параметрами // ПММ. 1961. Т. 25, № 6. С. 1011.
- [8] Баутин Н.Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой синхронизации // ПММ. 1970. Т. 34, № 5. С. 850.
- [9] Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 3. С. 403.
- [10] Матросов В.В., Шалфеев В.Д. Динамический хаос в фазовых системах. Н.Новгород, изд. Нижегородского университета, 2007.
- [11] Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально-интегрирующим фильтром // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т. 13, № 4. С. 561–566.
- [12] Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Шалфеев В.Д. Применение ЭВМ к расчету полосы захвата нелинейных систем фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника, 1972, т.27, №4, с.36-39.



- [13] Программный комплекс для моделирования нелинейной динамики и расчета динамических характеристик систем фазовой синхронизации: отчет о НИР «Автомат-2» / НИИ ПМК. Рук. Белюстина Л.Н., Пономаренко В.П. №ГР 0186.0113290. Инв.№0290.0048682. - Горький, 1985. - 118с.
- [14] Кузнецов Ю.А. Одномерные сепаратрисы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от параметра. Материалы по математическому обеспечению ЭВМ // Алгоритмы на ФОРТРАНе. Пущино: НЦБИ АН СССР. 1983. Вып.8.-48с.
- [15] Хибник А.И. Периодические решения системы п дифференциальных уравнений: Материалы по математическому обеспечению ЭВМ // Алгоритмы на ФОРТРАНе. Пущино: НЦБИ АН СССР. 1979. Вып.5.-72с.
- [16] Балабаев Н.К., Луневская Л.В. Движение по бифуркационной кривой в N-мерном пространстве. Материалы по математическому обеспечению ЭВМ // Алгоритмы на Фортране, вып.1. -Пущино: НЦБИ АН СССР, 1978.
- [17] Паркер Т.С., Чуа Л.О. INSITE - программный инструментарий для анализа нелинейных динамических систем // ТИИЭР, Т.75, №8, с.6-40, 113-124.
- [18] Белюстина Л.Н., Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Качественно-численный метод в исследовании трехмерных нелинейных СФС // Системы фазовой синхронизации/ Под ред. Шахгильдяна В.В., Белюстиной Л.Н. М.: Радио и связь, 1982. С.21-45.

Валерий Владимирович **Матросов**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ:  
АНАЛИЗ ДИНАМИКИ И РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ ФАП С  
ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРИРУЮЩИМ ФИЛЬТРОМ**

*Учебно–методическое пособие*

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»  
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура Times.

Усл. печ. л. 1,6. Уч-изд. л.

Заказ № 403. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Центре цифровой печати РИУ  
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского  
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.